27. Complex-Banach space ニ於ケル 解析函数ニツイテ (II)

霜田伊左衛 (阪大)

多変数函数論ニ於ケル Hartogs ノ定理ヲアル條件ノモトニ Complex Banach space ニ拡張シタイ．其ノ為ニ必要ナル定理ヲ A.E.Taylor 氏ノ論文[1]カラ掲載スル事ニシマス。C ヲ complex plane, E, E' ヲ夫々 complex-Banach space トスルトキ

定理 A $|\alpha|<R$, $\|x\|<S$ デ定義セラレタ E' ノ値ヲトル函数 $f(\alpha, x)$ ガ各ノ変数ニ関シテ regular デアレバ $0<R_1<R$ ナル任意ノ R_1 ニ対シテ $\|x\|<S$ 内ニアル open set O ガ存在シ $|\alpha|<R_1$, O デ $f(\alpha, x)$ ハ regular トナル。

Lemma. $f(\alpha, x)$ ハ $|\alpha|<R$, $\|x\|<S$ ニ於テ各変数ニ関シテ regular 且 $|\alpha|<R$, $\|x\|<s\ (<S)$ デ regular ナレバ $f(\alpha, x)$ ハ $|\alpha|<R$, $\|x\|<S$ デ regular デアル。

証明 $f(\alpha, x)$ ハ $|\alpha|<R$, $\|x\|<s$ デ regular ナル故

$$f(\alpha, x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha, x) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナル巾級数ニ展開セラレル。コヽニ $f_n(\alpha, x)$ ハ $|\alpha|<R$, $\|x\|<\infty$ デ 連続デ α ニツキ regular デ且 x ニツキ n 次ノ Homogeneous Polynomial デアル。今 $R_1<R$ ヲ任意ニトレバ $|\alpha|\leq R_1$ ナルトキ (1) ハ $\|x\|<s$ 内ノ任意ノ

compact set ヲxガ変ズルトキ (1) ハ一様收斂スル。故ニ

$$\sup_{G\in K}\ \overline{\lim}\ \sqrt[n]{\sup_{x\in G,\ |\alpha|\leq R_1}\|h_n(\alpha, x)\|} = \frac{1}{s}\ ^{2)}$$

故ニ任意ノ正数εニ対シ $s-\varepsilon = s_0$ トスレバ $n_0(s_0)$ ガ定マリ

$$\|h_n(\alpha, x)\| \leq \frac{1}{s_0^n}. \text{ ------------ (2)}$$

但シ $n \geq n_0(s_0)$, $|\alpha| \leq R_1$, $x\in G$ (GハKノ任意ノ element)
又 (1) ハ α ヲ fix スレバxニツキ $\|x\|<S$ デ regular ナル故
αヲ fix スレバ

$$\sup_{G\in K}\ \overline{\lim}\ \sqrt[n]{\sup_{x\in G}\|h_n(\alpha, x)\|} \leq \frac{1}{S}$$

乃チ任意ノεニ対シ $S-\varepsilon = S_1$ トオケバ $n_1(\alpha, S_1)$ ガ定マリ

$$\|h_n(\alpha, x)\| = \frac{1}{S_1^n} \text{ ---------- (3)}$$

但シ $n \geqq n_1(\alpha, S_1)$, $x\in G$ (GハKノ任意ノ element)
今 $E[y \mid y=S_1 x,\ x\in G] = G'$ トオケバ G' ニ於テハ(2)ヨリ

$$\|h_n(\alpha, y)\| \leq \left(\frac{S_1}{s_0}\right)^n$$

$$\frac{1}{n}\log\|h_n(\alpha, y)\| \leq \log\frac{S_1}{s_0}\quad (n \geq n_0,\ |\alpha|=R_1) \text{ --(4)}$$

又 (3) ヨリ $\frac{1}{n}\log\|h_n(\alpha, y)\| \leq 0$ $(n \geq n_1(\alpha, S_1))$ ----- (5)

然ルニ $\frac{1}{n}\log\|h_n(\alpha, y)\|$ ハyヲ fix シタトキ $|\alpha|\leq R_1$ 上デ最大値ハ必ズ $|\alpha| = R_1$ 上デトル，何故ナレバ若シ $|\alpha_0|<R_1$ デ最大値ヲトツタトスレバ $0<\rho<R_1-|\alpha_0|$ ナル任意ノρニ対シテ
$0\leq\theta<2\pi$ ナルトキ

$$\frac{1}{n}\log\|h_n(\alpha_0, y)\| \geq \frac{1}{n}\log\|h_n(\alpha_0+\rho e^{i\theta}, y)\|$$

$$\therefore \|h_n(\alpha_0, y)\| \geq \|h_n(\alpha_0+\rho e^{i\theta}, y)\|$$

$h_n(\alpha, y)$ ガ常数デナケレバ アルρニ於テ

$$\| h_n(\alpha_0, y)\| > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| h_n(\alpha_0+\rho e^{i\theta}, y)\| \, d\theta.$$

ヲ $h_n(\alpha, y)$ ハ α ニツキ regular デアルカラ

$$h_n(\alpha_0, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_n(\alpha_0+\rho e^{i\theta}, y)\, d\theta.$$

$$\therefore \| h_n(\alpha_0, y)\| < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| h_n(\alpha_0+\rho e^{i\theta}, y)\| \, d\theta.$$

之ハ不合理デアル。

今 $U_n(\alpha, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{n} \log^+ \| h_n(R_1 e^{i\theta}, y)\| \frac{R_1^2 - r^2}{R_1^2 - 2R_1 r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\theta.$

トオケバ $U_n(\alpha, y)$ ハ $|\alpha| < R_1$ デ調和デ $U_n(R_1 e^{i\theta}, y) = \frac{1}{n}\log^+$
$\| h_n(R_1 e^{i\theta}, y)\|$

$$\therefore \frac{1}{n}\log \| h_n(\alpha, y)\| - U_n(\alpha, y) \leq 0 \quad (|\alpha| = R_1)$$

$\frac{1}{n}\log \| h_n(\alpha, y)\|$ ハ常数カ又ハ境界デ最大値ヲトル函数デアルカ

ラ．常ニ $\quad \frac{1}{n}\log \| h_n(\alpha, y)\| - U_n(\alpha, y) \leq 0 \quad (|\alpha| \leq R_1) \cdots (6)$

一方 $\quad U_n(\alpha, y) \leq \frac{R_1 - r}{R_1 + r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\log^+ \| h_n(R_1 e^{i\theta}, y)\| \, d\theta.$

(4).(5) ヨリ Lebesgue ノ定理ニヨリ

$$\lim_{n\to\infty} U_n(\alpha, y) \leq \frac{R_1 - r}{R_1 + r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log^+ \| h_n(R_1 e^{i\theta}, y)\| \, d\theta.$$

$$= 0$$

今 $0 < R_0 < R_1$ ナル R_0 ヲ任意ニトレバ $U_n(\alpha, y) < \varepsilon$, $(n \geq n_2$.
$|\alpha| \leq R_0)$

(6) ヨリ $\quad \| h_n(\alpha, y)\| < (e^{\varepsilon})^n$

$$\therefore \sqrt[n]{\sup_{x\in G,\ |\alpha|\leq R_0} \| h_n(\alpha, x)\|} \leq e^{\varepsilon}\cdot \frac{1}{S_1}$$

G ハ任意デアルカラ $\quad \sup_{\xi\in K} \overline{\lim} \sqrt{\sup_{x\in G,\ |\alpha|\leq R_0} \| h_n(\alpha, x)\|} \leq \frac{1}{S_1}$

乃チ $\sum_{0}^{\infty} h_n(\alpha, x)$ ハ $|\alpha| \leq R_0$, $\|x\| < S_1$ 内ノ任意ノ compact set デ一様收斂スルカラソコデ正則ニナル。R_0, S_1 ハ夫々 R, S ニ如何程近クドモ良イカラ、$f(\alpha, x)$ ハ $|\alpha| < R$, $\|x\| < S$ デ regular デアル。

$\boxed{\text{定理 1}}$ $C \times E$ 内ノ任意ノ domain D デ定義セラレ、E' ノ値ヲトル函数 $f(\alpha, x)$ ガ各ノ変数ニ関シテ regular ナルトキ $f(\alpha, x)$ ハ D デ regular デアル。

$\boxed{\text{証 明}}$ D 内ノ任意ノ点 P ノ近傍デ正則ナレバヨイ。一般性ヲ失ハズニ P ヲ O 点ニトル。$R > 0$, $S > 0$ ヲ適当ニトレバ $|\alpha| < R$, $\|x\| < S$ ハ D ニ含マレル。$f(\alpha, x)$ ハ此所デ各ノ変数ニ関シテ regular デアルカラ、定理 A ニヨリ任意ノ $R_1 < R$ ニ対シテ $\|x\| < \frac{1}{3} S$ 内ニ open set $\mathfrak{O}$ ガ存在シテ $f(\alpha, x)$ ハ $|\alpha| < R_1$, $x \in \mathfrak{O}$ デ regular ニナル。$\mathfrak{O}$ ニ含マレル $\|x_1 - x\| < S_1$, $x_1 \in \mathfrak{O}$ ヲトレバ $f(\alpha, x)$ ハ $|\alpha| < R_1$, $\|x_1 - x\| < S_1$ デ regular デ α ヲ fix スレバ x ニ関シテハ $\|x_1 - x\| < \frac{2}{3} S$ デ regular デアルガラ Lemma ニヨリ $f(\alpha, x)$ ハ $|\alpha| < R_1$ $\|x\| < \frac{1}{3} S$ デ regular トナル。依ッテ $f(\alpha, x)$ ハ D デ regular トナル。（以上）

此ノ定理ノ一応用トシテ次ノ場合ヲ考フ。E デ定義セラレ E' ノ値ヲトル函数ノ folge $f_n(x)$ ヲ component トシ E'' ノ値ヲトル函数 $f(x)$ ヲ考ヘル、乃チ $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots)$ 又

$$\|f(x)\| = \sqrt[p]{\sum_{1}^{\infty} \|f_n(x)\|^p} \quad \text{デ定義スル。}$$

次ニ $C \times E$ デ定義セシ E'' ノ値ヲトル函数

$$F(\zeta, x) = \sum_{1}^{\infty} f_n(x) \zeta^n$$

ヲ定義スル。

$\boxed{\text{定理 2}}$ $f(x)$ ガ E ノ domain D デ regular ナル為ノ條件ハ

i) $f(x)$ ガ strongly continuous

ii) $F(\zeta, x)$ ガ $|\zeta|<1,\ x \in D$ デ regular

証明 i) $f(x)$ ガ regular ナレバ i) ハ当然満足サレテキル。x ヲ fix スレバ $f(x)$ ハ一定ナル故ニ $\sqrt[p]{\sum \|f_n(x)\|^p} < \infty$.

$$\therefore \quad \Big\|\sum_n^m f_n(x)\zeta^n\Big\| \le \sqrt[p]{\Big(\sum_n^m \|f_n(x)\|^p\Big)\Big(\sum_n^m |\zeta|^{pn}\Big)}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt[p]{1-|\zeta|^p}} \sqrt[p]{\sum_n^m \|f_n(x)\|^p} < \varepsilon$$

但シ $m>n>n_0(\varepsilon, x)$, $|\zeta|<\rho<1$.

乃チ $\sum f_n(x)\zeta^n$ ハ一様収斂スルカラ ζ ニツキ regular デアル。$\rho<1$ デ ρ ハ任意ダカラ $F(\zeta, x)$ ハ x ヲ fix スレバ ζ ニツキ $|\zeta|<1$ デ regular トナル。次ニ ζ ヲ $|\zeta|<1$ ニ fix スル。$f(x)$ ガ regular ナレバ $f_n(x)$ ハ又 regular デアル[3]。

$$\Big\|\sum_n^m f_n(x)\zeta^n\Big\| \le \|f(x)\| \frac{|\zeta|^n}{\sqrt[p]{1-|\zeta|^p}}$$

D 内ノ任意ノ compact set ヲ G トスレバ i) ニヨリ $\|f(x)\| < M_G$ ナル M_G ガ存在スル。$\therefore$ $m, n \ge n_1(\varepsilon)$ ナルトキ $|\zeta|<1$ ナル故

$$\Big\|\sum_n^m f_n(x)\zeta^n\Big\| < \varepsilon.$$

乃チ $\sum f_n(x)\zeta^n$ ハ D ノ任意ノ compact set デ一様収斂スル。故ニ D ニ於テ $F(\zeta, x)$ ハ x ニツキ regular デアル。故ニ定理 1 ニヨリ $|\zeta|<1$, $x \in D$ デ $F(\zeta, x)$ ハ regular トナル。

ii) 逆ニ $F(\zeta, x)$ ガ regular デアルトスル。

$$F(\zeta, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\zeta^n$$

$f_n(x)$ ハ D デ regular トナル。又 $f(x)$ ハ連続 $f(x)$ ハ regular トナル[1]。

---

1). A.E. Taylor; On the properties of analytic function in abstract space, Math. Ann. 115 (1938).

2)、本紙第一号、若者、complex-Banach space ニ於ケルワ級数ニツイテ参照。

3)、昨年十月当地数学談話会ニ於テ井岡君ノ発表シタ定理。

(1947. 1. 24 受付)